ÉCOLE NATIONALE DES INGÉNIEURS DES TRAVAUX RURAUX
ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

## CONCOURS D'ENTRÉE

Année 1977

**Option : Physique-Mathématiques**

# DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 heures

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n$ sur $\mathbb{R}$; soit L (E) l'ensemble des endomorphismes de E. On désigne par $i_E$ et $0_E$ respectivement l'application identique et l'application nulle de E (que l'on pourra noter $i$ et 0 sans indice lorsque aucune confusion ne sera à craindre).

*Définitions :* Deux éléments $p_1$ et $p_2$ de L (E) sont appelés *projections associées* s'il existe, dans E, deux sous-espaces vectoriels $E_1$ et $E_2$ tels que, quel que soit le vecteur X de E :

1° X s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $X = X_1 + X_2$ avec $X_1 \in E_1$ et $X_2 \in E_2$ ($E_1$ et $E_2$ sont donc des sous-espaces supplémentaires dans E);

2° $p_1(X) = X_1$ et $p_2(X) = X_2$.

Les projections $p_1$ et $p_2$ sont dites *définies* par les sous-espaces $E_1$ et $E_2$.



## I

1° Soient $p_1$ et $p_2$ deux projections associées, définies par deux sous-espaces supplémentaires $E_1$ et $E_2$ de E :

*a.* Déterminer le noyau et l'image de $p_1$ et $p_2$;

*b.* Calculer $p_1 + p_2$, $p_1 \circ p_2$, $p_2 \circ p_1$, $p_1^2 = p_1 \circ p_1$ et $p_2^2$.

2° On suppose l'espace E de dimension $n = 3$ et rapporté à une base donnée.

On considère la droite vectorielle D définie par le vecteur directeur V de composantes $(\alpha, \beta, \gamma)$ et le plan vectoriel P d'équation

$$px + qy + rz = 0$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $p$, $q$, $r$, sont des réels donnés.

*a.* A quelle condition D et P sont-ils des sous-espaces supplémentaires dans E?

*b.* Cette condition étant supposée remplie et X étant un vecteur de E, déterminer $X_1 \in D$ et $X_2 \in P$ tels que $X = X_1 + X_2$.

*c.* En déduire les matrices des projections associées $p_1$ et $p_2$ définies par les sous-espaces D et P.

## II

On considère deux endomorphismes $f$ et $f'$ de E tels que :

$$f \circ f' = 0_E \qquad f + f' = i_E \tag{1}$$

1° Montrer que $f$ et $f'$ vérifient l'équation

$$f^2 = f \tag{2}$$

et qu'inversement à toute solution de l'équation (2) correspond une autre solution $f'$ telle que $f$ et $f'$ vérifient les relations (1).

2° *a.* Étudier la restriction de $f$ à Im $f$;

*b.* Montrer que Ker $f$ et Im $f$ sont deux sous-espaces supplémentaires dans E;

*c.* Comparer Ker $f$ et Im $f'$.

.../...

X176X
ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX
ET DES TECHNIQUES SANITAIRES
1977

3° En déduire que deux endomorphismes $f$ et $f'$ sont des projections associées si, et seulement si, ils vérifient les relations (1).

4° Dans l'ensemble $M_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, on considère l'équation

$$X^2 = X. \tag{3}$$

*a.* Utiliser ce qui précède pour donner des expressions explicites de toutes les solutions de cette équation dans $M_3(\mathbb{R})$.

*b.* Déterminer en particulier les solutions de (3) qui sont des matrices symétriques. Montrer que celles de ces matrices qui sont différentes de la matrice nulle et de la matrice unité sont les matrices associées aux projections orthogonales dans un espace vectoriel *euclidien* de dimension 3.

## III

On se propose désormais d'étudier les endomorphismes de E vérifiant l'équation

$$(f - a\, i_E) \circ (f - b\, i_E) = 0_E \tag{4}$$

où $a$ et $b$ sont deux réels donnés *distincts*. On appelle S la partie de L (E) formée par les solutions de cette équation.

1° Soient $p_1$ et $p_2$ deux projections associées de E. Déterminer tous les couples de réels $(\alpha, \beta)$ tels que $f = \alpha\, p_1 + \beta\, p_2$ soit solution de l'équation (4).

2° Montrer que toute solution $f$ de l'équation (4) s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $f = a\, f_1 + b\, f_2$ où $f_1$ et $f_2$ sont deux projections associées de E qui seront dites *induites* par $f$ et que l'on calculera en fonction de $f$, $a$ et $b$.

3° $f$ étant un élément de S qui n'est pas une homothétie, soient $f_1$ et $f_2$ les projections induites par $f$. On donne une base de $E(e_1, e_2, ..., e_r, e'_1, e'_2, ..., e'_s)$ avec $r + s = n$, telle que $(e_1, e_2, ..., e_r)$ soit une base de $\operatorname{Im} f_1$ et $(e'_1, e'_2, ..., e'_s)$ une base de $\operatorname{Im} f_2$.

*a.* Déterminer la matrice associée à $f$ dans cette base;

*b.* Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres correspondants de $f$.



4° $f$ étant un élément de S qui n'est pas une homothétie, à quelle condition nécessaire et suffisante doivent satisfaire $a$ et $b$ pour que $f$ soit un automorphisme de E? Cette condition étant remplie, calculer $f^{-1}$

*a.* en fonction de $f$;

*b.* en fonction de $f_1$ et $f_2$, projections induites par $f$.

5° Soit $f \in S$.

*a.* Calculer la puissance $n$-ième $f^n$ de $f$ ($n$ entier $\geqslant 1$) en fonction de $f_1$ et $f_2$.

*b.* Montrer que $f^n$ est solution d'une équation de la forme

$$(\varphi - \lambda\, i_E) \circ (\varphi - \mu\, i_E) = 0_E$$

où $\lambda$ et $\mu$ sont des réels que l'on calculera en fonction de $a$, $b$ et $n$ et où $\varphi$ est l'inconnue. Montrer que si $ab \neq 0$, la propriété précédente est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (on conviendra que $f^{-n} = i_E$).

6° Dans l'ensemble $M_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, on considère l'équation

$$X^2 - (a + b)\, X + ab\, I = 0 \tag{5}$$

où $a$ et $b$ sont deux réels donnés *distincts*, I la matrice unité et 0 la matrice nulle de $M_3(\mathbb{R})$.

*a.* Déduire de ce qui précède une méthode permettant d'obtenir explicitement toutes les solutions de cette équation.

*b.* Quelles sont les valeurs que peut prendre le déterminant de la matrice X lorsque X est solution de l'équation (5)?

X 1777

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail